第 7 講　確率変数の和と積

PART1 確率変数の和の期待値

要点 ① 同時分布，確率変数の和の期待値

2 つの確率変数 X，Y について，$X=a$ かつ $Y=b$ である確率を

$$P(X=a,\ Y=b)$$

と表す。

X のとる値が x_1，x_2，……，x_n，Y のとる値が y_1，y_2，……，y_m であるとき，$X=x_i$ かつ $Y=y_j$ である確率 $P(X=x_i,\ Y=y_j)$ を p_{ij}，$P(X=x_i)=p_i$，$P(Y=y_j)=q_j$ とすると，X，Y の確率分布は右の表のようになる。この対応を X と Y の「　　　　　」という。

X＼Y	y_1	y_2	…	y_m	計
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1m}	
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2m}	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_n	p_{n1}	p_{n2}	…	p_{nm}	
計			…		

この表から

$$P(X=x_i)=p_{i1}+p_{i2}+\cdots\cdots+p_{im}=p_i$$

$$P(Y=y_j)=p_{1j}+p_{2j}+\cdots\cdots+p_{nj}=q_j$$

が成り立つ。

2 つの確率変数 X，Y の和を $Z=X+Y$ とすると，Z も確率変数である。確率変数 Z の期待値について考える。

X，Y の同時分布が右の表で与えられているとき，$Z=X+Y$ の期待値は

X＼Y	y_1	y_2	計
x_1	p_{11}	p_{12}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	p_2
計	q_1	q_2	1

$$E(Z)=(x_1+y_1)p_{11}+(x_1+y_2)\qquad+(\qquad\qquad)p_{21}+$$

$$=x_1(p_{11}+p_{12})+x_2(p_{21}+p_{22})+y_1(p_{11}+p_{21})+y_2(p_{12}+p_{22})$$

$$=x_1\qquad+x_2\qquad+y_1\qquad+y_2$$

$$=E(X)+E(Y)$$

一般に，次のことが成り立つ。

確率変数の和の期待値

2つの確率変数 X，Y について

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

例 1個のさいころを2回投げるとき，1回目と2回目に出る目の和の期待値を求める。

1回目，2回目に出る目をそれぞれ X，Y とすると，求めるものは $X+Y$ の期待値である。

X の確率分布は下の表のようになる。

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

よって $E(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=(1+2+3+4+5+6)\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$

同様に $E(Y)=\frac{7}{2}$

したがって，出る目の和 $X+Y$ の期待値は

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\quad+\quad=7$$

確率変数 X と定数 a，b について，$E(aX+b)=aE(X)+b$ が成り立つことから，確率変数 X，Y と定数 a，b について

$$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$$

が成り立つ。また，3つの確率変数 X，Y，Z についても

$$E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)$$

が成り立つ。

1 100 円硬貨 1 枚と 10 円硬貨 1 枚を同時に投げる。

(1) 表が出た硬貨の枚数の期待値を求めよ。

(2) 表が出た硬貨の金額の和の期待値を求めよ。

Point Pickup

確率変数の和の期待値

2 つの確率変数 X, Y と定数 a, b について

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

$$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$$

第 7 講　PART1 確認問題

1　1から5までの数が1つずつ書かれた5枚のカードがある。この中から1枚引き，数を記録してからもとに戻し，もう1枚引く。1回目と2回目に引いたカードに書かれた数の和の期待値を求めよ。 ア

2　500円硬貨1枚と100円硬貨1枚を同時に投げるとき，表が出た硬貨の金額の和の期待値を求めよ。

イウエ 円

第7講　確率変数の和と積

PART1　確率変数の和の期待値

1　100円硬貨1枚と10円硬貨1枚を同時に投げる。

(1)　表が出た硬貨の枚数の期待値を求めよ。

(2)　表が出た硬貨の金額の和の期待値を求めよ。

[解答]

表が出た100円硬貨，10円硬貨の枚数をそれぞれX枚，Y枚とすると，確率変数X，Yの確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Y	0	1	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$E(X)=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，$E(Y)=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(1)　表が出た硬貨の枚数の期待値は

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

(2)　表が出た硬貨の金額の和の期待値は

$$E(100X+10Y)=100E(X)+10E(Y)=100\cdot\frac{1}{2}+10\cdot\frac{1}{2}=55\,(\text{円})$$

第7講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：6

[解説]

1回目と2回目に引いたカードに書かれた数をそれぞれ X，Y とすると，求めるものは $X+Y$ の期待値である。

X の確率分布は下の表のようになる。

X	1	2	3	4	5	計
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

よって

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{5}+2\cdot\frac{1}{5}+3\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{1}{5}+5\cdot\frac{1}{5}$$
$$=3$$

同様に

$$E(Y)=3$$

したがって，カードに書かれた数の和 $X+Y$ の期待値は

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=3+3=6$$ [A]

[A]　2つの確率変数 X，Y について
$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

2 **[正解]** イウエ：300

[解説]

表が出た500円硬貨，100円硬貨の枚数をそれぞれX枚，Y枚とすると，確率変数X，Yの確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Y	0	1	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$E(Y)=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

よって，表が出た硬貨の金額の和の期待値は

$$E(500X+100Y)$$ [B]

$$=500E(X)+100E(Y)$$

$$=500\cdot\frac{1}{2}+100\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\mathbf{300}$$ **（円）**

[B]　2つの確率変数X，Yと定数a，bについて
$$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$$